

高一新生暑假作業

歡迎各位來到陽明高中!在會考結束短暫的喘息之後，想必大家對於高中的學習內容充滿好奇與期待。在未來的三年裡，數學仍然是一門很重要的學科，而且相較於國中，高中數學的廣度與深度都有很大的跳躍。為了幫助各位更好地迎接未來的學習，學校挑選了一些針對高一上數學的先備知識，當作各位的暑假作業。希望大家利用暑假好好練習，並預祝各位高中生活充實愉快!

根式的化簡

1. $3\sqrt{a} = \sqrt{45}$ ，則 $a = ?$

2. $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98} = ?$

3. $(\sqrt{7} + 3) \cdot (2 - \sqrt{7}) = ?$

4. $(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{6}) = ?$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = ?$

6. $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} = ?$

7. $a = \sqrt{13 + 3\sqrt{2}}$ ，則 a 介於哪兩個相鄰整數之間?

立方根:

$\sqrt[3]{a}$ 為 a 的立方根，即滿足方程式 $x^3 = a$ 的實數根。例如： $\sqrt[3]{27} = 3$

$$\sqrt[3]{a^3b} = a \cdot \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{a^3b^2} = a \cdot \sqrt[3]{b^2}$$

8. $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{375} = ?$

9. $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = ?$ (配合立方和乘法公式)

10. $(\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}) \cdot \sqrt[3]{108} = ?$

乘法公式

$$1. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$2. (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$3. (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$4. (a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

$$5. (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

常用公式變形

$$1. a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$2. a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

例題

$$11. \text{展開 } (2a^2 - 5b)^2 = ?$$

$$12. \text{展開 } (-3a + 2b) \cdot (3a + 2b) = ?$$

$$13. \text{展開 } (2x + y)^3$$

$$14. \text{展開 } (4x - 3y) \cdot (16x^2 + 12xy + 9y^2) = ?$$

$$15. \text{展開 } (2a - b + c)^2 = ?$$

$$16. \text{展開 } (a + b - c) \cdot (a - b + c) = ?$$

$$17. \text{展開 } \left(\frac{x}{3} + 2y\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - 2y\right) \cdot \left(\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}xy + 4y^2\right) \cdot \left(\frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}xy + 4y^2\right) = ?$$

$$18. \text{已知 } a + b = 5, a \cdot b = 2, \text{求(1) } a^2 + b^2 = ? \text{ (2) } a^3 + b^3 = ?$$

$$19. \text{因式分解 } 6x^2 - 11x - 10$$

$$20. \text{已知 } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \text{ 可被 } x - 1 \text{ 整除，試將 } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \text{ 分解為三個一次因式的乘積。}$$

多項式的四則運算

21. 已知 $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, $g(x) = 4x^4 - 3x^2 + x - 1$, 求

(1) $f(x) + g(x) = ?$

(2) $f(x) - g(x) = ?$

22. 已知 $3x^3 - 4x + 5 + f(x) = 2x^2 - 8x + 7$, 求 $f(x) = ?$

23. 已知 $f(x) + g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$, $f(x) - g(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$,

求 $f(x) = ?$

24. 已知 $f(x) = 2x^2 - x + 3$, $g(x) = 3x - 1$, 求 $f(x) \cdot g(x) = ?$

25. 求 $(3x^3 - 2x^2 + x + 7) \cdot (2x^3 + 5x^2 - 3x - 1)$ 的展開式中, x^4 的係數為何?

26. 已知 $f(x) = 2x^4 - x^2 + 5x - 1$, $g(x) = x^2 + 2x - 1$, 試求 $f(x) \div g(x)$ 的商式和

餘式?

27. 已知 $f(x) = 6x^3 + 4x^2 + x - 1$, $g(x) = 2x + 1$, 試求 $f(x) \div g(x)$ 的商式和餘式?

28. 多項式 $g(x) = 2x^2 - x + 1$, 已知 $f(x) \div g(x)$ 的商式為 $x^2 - x + 1$, 餘式為 $x + 5$,

求 $f(x) = ?$

29. 已知 $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 16x + b$ 除以 $x^2 + 2x - 3$ 可以整除, 求 $a = ?$, $b = ?$

30. $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + ax^2 - 1$, $g(x) = bx^5 - 4x^4 + cx^3 - 2x^2 - 1$,

若 $f(x) = g(x)$, 則 $a = ?$, $b = ?$, $c = ?$

二次函數：

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的二次函數，可利用配方法化成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式求頂點坐標。

31. 已知某二次函數圖形的頂點為 $(0, -4)$ ，且通過 $(-3, -1)$ ，則此二次函數為何？
32. 已知某二次函數的圖形通過 $(-2, 8)$ ， $(4, 8)$ ， $(1, 5)$ 三點，則此二次函數為何？
33. 求出二次函數 $y = 2x^2 - 4x + 3$ 圖形的頂點坐標。
34. 若二次函數 $y = -x^2 + bx + c$ 與 x 軸的交點坐標為 $(1, 0)$ 與 $(-2, 0)$ ，則 $b = ?$, $c = ?$
35. 若二次函數 $y = x^2 + 8x + 6$ 與 $y = -6$ 交於 A, B 兩點，則 $\overline{AB} = ?$

一元二次方程式的解

36. 解一元二次方程式 $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} = 0$
37. 解一元二次方程式 $6(x - 3)^2 + 13(x - 3) - 8 = 0$
38. 解一元二次方程式 $x^2 - 3x - 6 = 0$
39. 若一元二次方程式 $x^2 + 3x + m = 0$ 有實數解，則 m 的範圍為何？
40. 若一元二次方程式 $a(x + b)^2 = 3$ 的兩根為 $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ，其中 a, b 為正數，則 $a = ?$ $b = ?$

指數與科學記號

1. a, b 為實數，對於任意整數 m, n 恆有

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(2) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(3) a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

2. 每一個正實數 a 都可以科學記號表示 $a = b \cdot 10^n$ ，其中 $1 \leq b < 10$ ， n 是整數。

例題

41. 化簡 $(a \cdot b^2)^3 \cdot (a^2)^2 \div (a^2 b)^2 = ?$

42. $(\sqrt{3} - 2)^3 \cdot (\sqrt{3} + 2)^3 = ?$

43. $2^{10} + 2^{10} + 2^{10} + 2^{10} = 2^n$ ，則 $n = ?$

44. 試比較 $a = 2^{45}$ ， $b = 3^{30}$ ， $c = 7^{15}$ 三數的大小。

45. $200^5 \times 30^3$ 以科學記號表示為 $a \times 10^n$ ，則 $a = ?$ ， $b = ?$

46. 2.518×10^{30} 為幾位數的整數？

47. 2.518×10^{-30} 的小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

48. 將 $3 \times 10^9 + 2.1 \times 10^{10} - (8 \times 10^4)^2$ 化為科學記號表示

參考答案

1. 5 2. $5\sqrt{2}$ 3. $-1 - \sqrt{7}$ 4. $\sqrt{3}$ 5. $\sqrt{3} - 1$ 6. $9 + 4\sqrt{5}$
7. 4 到 5 之間 8. 0 9. 5 10. 48 11. $4a^4 - 20a^2b + 25b^2$
12. $-9a^2 + 4b^2$ 13. $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$ 14. $64x^3 - 27y^3$
15. $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 2bc + 4ca$ 16. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
17. $\frac{x^6}{729} - 64y^6$ 18. (1) 21 (2) 95 19. $(2x - 5)(3x + 2)$
20. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 21. (1) $4x^4 - x^2 - 4x + 2$ (2) $-4x^4 + 5x^2 - 6x + 4$
22. $-3x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ 23. $x^2 - x - 2$ 24. $6x^3 - 5x^2 + 10x - 3$
25. -17 26. $2x^2 - 4x + 9$; $-17x + 8$ 27. $3x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$; $-\frac{5}{4}$
28. $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 6$ 29. $a = -1, b = 15$ 30. $a = -2, b = 3, c = 0$
31. $y = \frac{1}{3}x^2 - 4$ 32. $y = \frac{1}{3}(x - 1)^2 + 5$ 33. (1, 1) 34. $b = -1, c = 2$
35. 4 36. $x = -1$ or $\frac{5}{6}$ 37. $x = \frac{7}{2}$ or $\frac{1}{3}$ 38. $x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$
39. $m \leq \frac{9}{4}$ 40. $a = 4, b = \frac{1}{2}$ 41. $a^3 \cdot b^4$ 42. -1 43. 12
44. $b > a > c$ 45. $a = 8.64, b = 15$ 46. 31 47. 30 48. 1.76×10^{10}