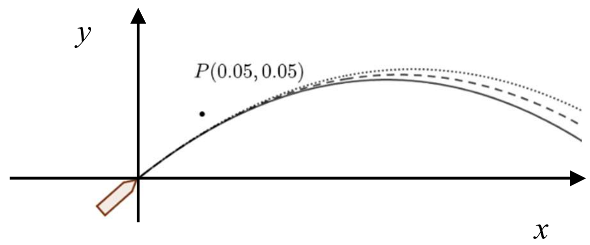
臺北市立陽明高級中學115學年度正式教師甄選

高中數學科教師甄試試題卷

一、單選題 (合計 2 題，每題 3 分)



1. (　　) 某水上樂園想用三條拋物線的部分圖形繪製如右的噴水軌跡，

假設水流皆從原點的同一固定仰角噴出，

函數為 $y=a_ix^2+b_ix$，$x\geq 0$，$i=1,2,3$，

$M=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$ 是方程式係數排列而成的矩陣，則 M 為下列何者時，函數圖形與噴水軌跡最接近？

(A) $\begin{bmatrix} -1.9 & 0.8 \\ -2 & 0.8 \\ -2.1 & 0.8 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} -0.9 & 1.1 \\ -1 & 1.1 \\ -1.1 & 1.1 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} -1 & -0.9 \\ -2 & -0.9 \\ -3 & -0.9 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} -0.2 & 1 \\ -0.3 & 1 \\ -0.4 & 1 \end{bmatrix}$

2. (　　) 人們描述聲音的大小通常使用分貝，其計算式為：

$$dB(I)=10\times\log\frac{I}{I_0}$$

其中 $dB(I)$ 代表聲強 I (瓦特/平方公尺) 對應的分貝數。$I_0=10^{-12}$ (瓦特/平方公尺) 是 0 分貝的聲強。

由對數的性質可知，聲強乘上某個正數，分貝就加上固定的值。

如下表顯示聲強乘上 10，分貝就增加 10。

I	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}
$dB(I)$	0	10	20	30	40

伊森觀察到人類耳朵對聲音大小的變化是依「比例」感知的。他定義了一種新單位「*伊分貝*」，規定：

當聲強為 10^{-12} (瓦特/平方公尺) 時定義為 0「*伊分貝*」。再實測聲強最少要相差 1.2 倍，自己才能分辨聲音有大小差異，於是定義當聲強變為原來的 1.2 倍時，「*伊分貝*」數值恰好增加 1。推得計算式：

$$\textit{伊分貝}(I)=k\times\log\frac{I}{I_0}$$

請問式中的參數 k 最接近下列何者？($\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$)

(A) 1.2　(B) 9.8　(C) 10　(D) 12.6

二、填充題 (合計 12 題，每題 6 分，答案完全正確才給分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2026}{n}\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(2+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(2+\frac{n-1}{n}\right)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2026}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)^2}\right)=$ ________________。

2. 某學生蒐集到汽水飲用杯數 x 與滿意度 y 的資料如下：(杯數 x 可以是任意正實數)

飲用杯數 x	0	1	2	3
滿意度 y	0	2	3	0

真實狀況中喝太多汽水滿意度會下降，使用簡單線性模型不合適。

若以二次函數 $y=ax^2+bx$ 來建模，並用最小平方法來估計參數 a 與 b，

則在此模型下，飲用________________杯汽水會有最高的滿意度。

3. 某次定期考因學生平均分數偏低，老師考慮採用下列兩種調分公式：

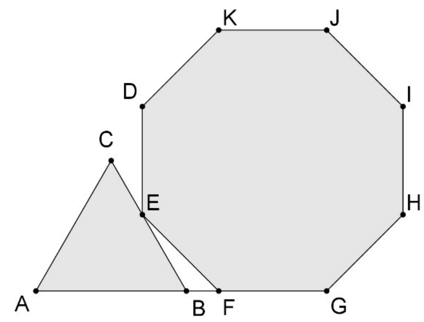
公式 A： $y = 0.6x + 40$

公式 B： $y = 10\sqrt{x}$

（其中 x 為原始分數，$0 \le x \le 100$，x 為整數，y 為調分後的分數）

試求：除了滿分以外，所有使得「公式 A 調分後結果**不低於**公式 B」的原始分數 x 之集合。答：________________。

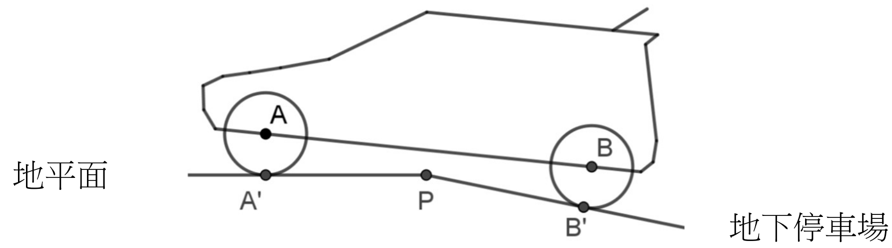
4. 已知三角形 ABC 為正三角形，$DEFGHIJK$ 為正八邊形如右圖(僅供參考)
且 E 為 $\overline{BC}$ 上一點，$\overline{CE} = 2$，A, C, D 三點共線，A, B, F, G 四點共線，
(點 C 介於 A, D 之間，點 B, F 在 $\overline{AG}$ 上)
則 $\overline{AF} =$________________。



5. 為了解遠處一個鏡面的傾斜程度，對鏡面發射沿著直線 $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ 前進的雷射光，並測得反射之雷射光沿著直線 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-16}{6}$ 前進而推算出鏡面的一個法向量 $(20, m, n)$，則數對 $(m, n) =$________________。

6. 有一部汽車正從地下停車場的斜坡 $\overrightarrow{PB'}$ 開上地平面 $\overrightarrow{PA'}$ (如下圖所示)，若車輪始終保持圓形，A 點與 B 點為其圓心，

且半徑 $\overline{AA'} = \overline{BB'} = 1$，$\overline{AB} = 8$，$\angle AA'P = \angle BB'P = 90°$，$\cos\frac{\angle A'PB'}{2} = \frac{1}{11}$，



令直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 為 x 軸，點 $A(-4,0)$，$B(4,0)$，
已知當 $\overline{PA'} = \overline{PB'}$ 時，汽車底盤 $\overline{AB}$ 距離坡頂 P 點最近，最容易發生底盤擦撞。
請計算當 $\overline{PA'} = \overline{PB'}$ 此特定瞬間時，P 點到 $\overline{AB}$ 的最短距離 d 為________________。

7. 在等腰三角形 ABC 中，頂角為 θ。若其外接圓半徑 R 與內切圓半徑 r 滿足 $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$，

且此三角形**不為直角三角形**，則 $\sin\frac{\theta}{2} =$ ________________。

8. 某高鐵列車共有 12 節車廂，**隨機選取**其中 3 節設置廁所，**在已知這 3 節車廂互不相鄰的條件下**，令第 1 節車廂有廁所的機率為 P_1，第 6 節車廂有廁所的機率為 P_6，則數對 $(P_1, P_6) =$________________。

9. 劍橋大學數學家 Tadashi Tokieda 提到一個違反直覺的現象：如果 A、B 兩人不斷擲硬幣，A 要擲到「正反」(順次序)才停止，而 B 要擲到「正正」才停止，那麼平均而言，A 只需要擲 4 次，但 B 需要擲 6 次——即使「正反」和「正正」出現的機率一樣。」。請問若要擲到「正正反」才停止，則平均而言要擲________________次。

10. 將「$aabbbcdefg$」共 10 個字母排成一列（相同字母視為相同物）。若規定**任一個 $\boldsymbol{a}$ 與任一個 $\boldsymbol{b}$ 皆不得相鄰**（相同字母相鄰則不受此限），則共有________種排列方式。

11. 設 a,b,c,d 為實數，且滿足方程組 $\begin{cases} a+b=-1 \\ ab+bc+ca=-3 \\ abc+bcd+cda+dab=-5 \\ abcd=12 \end{cases}$，則 $c+d=$________。

12. 已知 n 是比 35 小且與 35 互質的正整數，若 $n^{19}-2$ 為 35 的倍數，則 n 的值為________。

三、計算題 (合計 3 題，共 22 分，寫下詳細過程才給分)

1. 有 115 個保險箱和 115 把鑰匙。每把鑰匙恰好能打開一個保險箱，每個保險箱裡也只有一把鑰匙。現在主人隨機地在每個保險箱裡面放一把鑰匙，把其中的 24 個保險箱鎖上，而保留 91 個保險箱開著（這個動作是隨機的）。
   請求出這 91 個打開的保險箱裡的鑰匙，能打開其餘 24 個保險箱的機率是多少？(6 分)
   附註：保險箱一旦被打開，鎖在裡面的鑰匙就可用來試著打開其他的保險箱。

2. 某學生解一個遞迴數列問題的題目與解法如下：
   題目：已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1=2, a_{n+1}=4a_n-3n+1,\ n\in\mathbb{N}$，求一般項 a_n。
   學生的解法：

   設 $a_{n+1}+k=4(a_n+k)$，
   展開可得 $a_{n+1}+k=4a_n+4k$，因此 $k=-n+\frac{1}{3}$，
   由於 $\langle a_n+k \rangle$ 形成公比為 4 的等比數列，因此 $a_n+k=(a_1+k)4^{n-1}$，
   將 $k=-n+\frac{1}{3}$ 代入可得 $a_n-n+\frac{1}{3}=\left(a_1-n+\frac{1}{3}\right)4^{n-1}$，
   故 $a_n=\left(\frac{7}{3}-n\right)4^{n-1}+n-\frac{1}{3}$。

   請問學生的解法哪裡有問題？(2 分) 並寫下您會跟學生如何討論以及解惑？(6 分)

3. 某學生寫了求極限值 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+1)^{102}-1}{x+2}$ 的過程如下：

   $$\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)^{102}-1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)^{100}(x+1)^2-1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)^{100}(x+1)^2-(x+1)^{100}}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)^{100}\left[(x+1)^2-1\right]}{x+2}$$
   $$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)^{100}[(x+2)x]}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+1)^{100}x=-2$$

   但是發現答案不對，也不知道錯在哪裡。
   請用高中範圍內的方法算出正確的極限值(2 分)，並寫下您會跟學生如何討論以及解惑？(6 分)